

Calcolo della temperatura della pizza dopo 10 minuti ...e come si fa ?

Sarebbe meglio affrontare la questione con il docente di riferimento.

Risultato:

$$T(t) = 46.6455 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

DERIVATA

La notazione dT/dt si chiama derivata e rappresenta il tasso di variazione della variabile T (temperatura, in questo caso) rispetto alla variabile t (tempo).

Cosa significa "derivata"?

- È un concetto fondamentale del calcolo differenziale.
- Indica quanto velocemente una grandezza cambia rispetto a un'altra.
- Nel caso di dT/dt , descrive come la temperatura varia in funzione del tempo.

Altri modi di chiamare la derivata:

1. Tasso di variazione istantaneo: misura il cambiamento in un dato momento, a differenza di un cambiamento medio su un intervallo.
2. Velocità di variazione: spesso usato per grandezze che cambiano nel tempo, come la velocità fisica o il riscaldamento.

Relazione con il grafico:

- La derivata dT/dt corrisponde alla pendenza della tangente al grafico di $T(t)$ in un punto.
- Se $dT/dt > 0$: la temperatura sta aumentando.
- Se $dT/dt < 0$: la temperatura sta diminuendo.

In sintesi, dT/dt è una derivata, e la sua interpretazione dipende dal contesto fisico o matematico in cui viene utilizzata.

La notazione dT/dt si utilizza per rappresentare la derivata di una funzione $T(t)$ rispetto alla variabile t .

Questa notazione viene dal calcolo differenziale e ha un significato preciso: **descrive il tasso di variazione di T (in questo caso, la temperatura) rispetto al tempo t .**

Significato di dT/dt :

1. T : rappresenta una funzione che dipende dal tempo t , ad esempio $T(t)$ indica la temperatura della pizza in funzione del tempo.
2. dT/dt : è il cambiamento infinitesimale della temperatura (dT) per un cambiamento infinitesimale del tempo (dt).

In parole semplici:

- Se $T(t)$ è la temperatura della pizza, dT/dt ci dice quanto velocemente la temperatura cambia per ogni unità di tempo.
- Ad esempio, se $dT/dt = 5$, significa che la temperatura sta aumentando di 5°C al minuto.

Perché si scrive così?

Questa notazione deriva dalla definizione della **derivata**:

$$dT/dt = \lim(\Delta t \rightarrow 0) (\Delta T / \Delta t)$$

Dove:

- ΔT : è la variazione della temperatura.
- Δt : è la variazione del tempo.
- Il limite (\lim) rappresenta il comportamento quando queste variazioni diventano infinitesimamente piccole.

Perché usiamo questa notazione nelle **equazioni differenziali**?

Nelle equazioni differenziali, come:

$$dT/dt = -k * (T - T_{\text{forno}})$$

- dT/dt descrive come cambia la temperatura in ogni istante.
- Il resto dell'equazione, $-k * (T - T_{\text{forno}})$, ci dice che il cambiamento di temperatura dipende dalla differenza tra la temperatura attuale (T) e quella del forno (T_{forno}), e che questo cambiamento è proporzionale a tale differenza (fattore k).

La notazione dT/dt è un modo compatto e preciso per esprimere come una grandezza (temperatura, in questo caso) cambia rispetto a un'altra variabile (tempo). È fondamentale nel calcolo delle equazioni differenziali, poiché ci permette di modellare fenomeni dinamici come il riscaldamento o il raffreddamento della pizza.

LIMITE

Il limite (\lim) rappresenta il comportamento di un rapporto, come $\Delta T/\Delta t$, quando la variazione del tempo (Δt) diventa infinitesimamente piccola, ossia tende a zero.

Più precisamente:

$$dT/dt = \lim(\Delta t \rightarrow 0) (\Delta T / \Delta t)$$

Questo significa che calcoliamo il tasso di variazione istantaneo della temperatura T rispetto al tempo t .

Dettagli:

1. Quando Δt è un valore finito (ad esempio 1 minuto), il rapporto $\Delta T / \Delta t$ descrive il tasso di variazione medio della temperatura in quel periodo.
2. Quando Δt diventa molto piccolo, avvicinandosi a zero, il rapporto $\Delta T / \Delta t$ misura il tasso di variazione istantaneo della temperatura in un dato istante.
3. Il limite formalizza questo processo, permettendo di passare da una variazione media su un intervallo finito a una variazione infinitesimale in un singolo istante.

Interpretazione visiva:

Se immagini un grafico che mostra come la temperatura cambia nel tempo:

- $\Delta T / \Delta t$ è la pendenza della retta che collega due punti sul grafico (variazione media).
- dT/dt è la pendenza della tangente al grafico in un punto specifico (variazione istantanea).

Il limite consente di definire la derivata come una misura precisa della variazione istantanea, catturando il comportamento della funzione $T(t)$ in un punto, anziché su un intervallo. Questo è essenziale per descrivere dinamiche continue come il riscaldamento o il raffreddamento.

EQUAZIONE DIFFERENZIALE

Equazione differenziale di partenza:

$$dT/dt = -k * (T - T_{\text{forno}})$$

Dove:

- T è la temperatura della pizza al tempo t .
- T_{forno} è la temperatura del forno (costante).
- k è la costante di raffreddamento.
- dT/dt è la velocità di variazione della temperatura nel tempo.

Integrazione analitica:

Separiamo le variabili:

$$dT / (T - T_{\text{forno}}) = -k * dt$$

Integriamo:

$$\text{Integrale} | T - T_{\text{forno}} | = -k * t + C$$

Eleviamo entrambi i lati alla base e :

$$T - T_{\text{forno}} = C' * e^{(-k * t)}$$

Dove C' è una costante e $\exp(-k * t)$ equivale a e elevato a $(-k * t)$ con e = costante di Eulero.

Soluzione generale:

$$T(t) = T_{\text{forno}} + C' * e^{(-k * t)}$$

Determiniamo C' usando la condizione iniziale $T(0) = T_0$:

$$C' = T_0 - T_{\text{forno}}$$

Formula finale:

$$T(t) = T_{\text{forno}} + (T_0 - T_{\text{forno}}) * e^{(-k * t)}$$

Dati forniti:

$T_0 = 20$ (temperatura iniziale della pizza)

$T_{\text{forno}} = 300$ (temperatura del forno)

$k = 0.01$ (costante di raffreddamento)

$t = 10$ (tempo in minuti)

Calcolo passo per passo:

1. Differenza iniziale di temperatura:

$$T_0 - T_{\text{forno}} = 20 - 300 = -280$$

2. Parte esponenziale:

$$e^{(-k * t)} = e^{(-0.01 * 10)} = e^{(-0.1)} \approx 0.9048$$

3. Temperatura finale:

$$T(t) = T_{\text{forno}} + (T_0 - T_{\text{forno}}) * e^{(-k * t)}$$

$$T(10) = 300 + (-280) * 0.9048$$

$$T(10) \approx 300 - 253.3545 \approx 46.6455 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Risultato finale:

Dopo 10 minuti, la temperatura della pizza è:

$$T(t) \approx 46.65 \text{ } ^\circ\text{C}$$

INTEGRALE

Integriamo: integrale $|T - T_{\text{forno}}| = -k * t + C$

L'integrazione in questo caso serve a risolvere l'equazione differenziale che descrive come cambia la temperatura della pizza nel tempo.

Senza l'integrazione, abbiamo solo la relazione tra la variazione della temperatura (dT/dt) e la differenza tra T e T_{forno} . L'integrazione ci permette di trovare una formula esplicita per $T(t)$, ossia la temperatura della pizza in funzione del tempo.

Perché è necessaria l'integrazione e perchè è importante ?

L'equazione differenziale di partenza è:

$$dT/dt = -k * (T - T_{\text{forno}})$$

Questa equazione descrive il tasso di variazione della temperatura della pizza. Tuttavia, non ci dice direttamente quale sarà la temperatura dopo un certo tempo t .

Attraverso l'integrazione:

- Troviamo una soluzione generale $T(t)$, che ci dà la temperatura della pizza per ogni istante di tempo t .
- Usiamo i dati iniziali ($T(0) = T_0$) per calcolare la costante di integrazione e ottenere una soluzione specifica per il nostro problema.

Che cosa descrive fisicamente l'integrazione in questo contesto?

L'integrazione tiene conto del fatto che:

1. La temperatura della pizza cambia più rapidamente all'inizio, quando la differenza tra T e T_{forno} è grande.
2. Man mano che T si avvicina a T_{forno} , il tasso di variazione diminuisce (la pizza si scalda più lentamente).

L'integrazione formalizza matematicamente questa variazione non lineare, risultando nella formula esponenziale:

$$T(t) = T_{\text{forno}} + (T_0 - T_{\text{forno}}) * e^{(-k * t)}$$

Esempio pratico:

Supponiamo che la pizza sia inizialmente a 20°C ($T_0 = 20$) e il forno sia a 300°C ($T_{\text{forno}} = 300$). Senza integrare, non potremmo calcolare la temperatura della pizza $T(t)$ dopo 10 minuti.

Con l'integrazione, otteniamo una formula che ci consente di sostituire $t = 10$ minuti e calcolare direttamente:

$$T(10) = 300 + (20 - 300) * e^{(-0.01 * 10)}$$

L'integrazione è indispensabile in questo caso per trasformare un modello matematico (l'equazione differenziale) in una formula che possiamo usare per fare previsioni precise e sapere quando la pizza si brucia.

NOTA AGGIUNTIVA : MA QUESTA $dy/dx = x + y$ E' UNA DERIVATA O UNA EQUAZIONE ?

Un'equazione differenziale, come ad esempio $dy/dx = x + y$, può sembrare simile a una derivata, ma è effettivamente un'uguaglianza che coinvolge una derivata dy/dx .

Differenza tra Derivata e Equazione Differenziale:

- **Derivata:** Una derivata come dy/dx rappresenta il tasso di variazione istantaneo di una funzione rispetto alla variabile indipendente. In altre parole, descrive quanto cambia y rispetto a x in un punto specifico. È una quantità che esprime la velocità di cambiamento di una funzione.
- **Equazione Differenziale:** Un'equazione differenziale è un'uguaglianza che coinvolge derivate e altre funzioni. In altre parole, una equazione differenziale stabilisce una relazione tra una funzione e le sue derivate. L'obiettivo di un'equazione differenziale è trovare la funzione che soddisfa quella relazione.

Nel caso dell'equazione differenziale $dy/dx = x + y$, hai una relazione che dice che il tasso di variazione della funzione y rispetto a x è uguale a $x + y$.

Interpretazione:

- $dy/dx = x + y$ significa che la derivata di y rispetto a x (cioè il tasso di variazione di y) è uguale a $x + y$.
- Il tuo obiettivo, risolvendo questa equazione differenziale, è trovare una funzione $y(x)$ che soddisfi questa relazione.

In breve:

- La derivata è una misura del cambiamento di una funzione in un punto specifico.
- L'equazione differenziale è un'uguaglianza che descrive come una funzione e le sue derivate sono collegate. Risolvere l'equazione significa trovare la funzione che soddisfa questa relazione.

Esempio di risoluzione:

Per risolvere $dy/dx = x + y$, si usa solitamente un metodo come il metodo di separazione delle variabili o il metodo delle equazioni lineari. La soluzione della equazione ti fornirà la funzione $y(x)$ che soddisfa questa relazione.

Dedicato a Carlida, Gagliano del Capo Novembre 2024